



TITLE:

# Slant Geometry on psude spheres in Lorents-Minkowski space (Singularity theory of smooth maps and related geometry)

AUTHOR(S):

浅山, 未来理; 玉冲, 愛子

---

CITATION:

浅山, 未来理 ...[et al]. Slant Geometry on psude spheres in Lorents-Minkowski space (Singularity theory of smooth maps and related geometry). 数理解析研究所講究録 2010, 1707: 94-110

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170144>

RIGHT:

## Slant Geometry on psude spheres in Lorents-Minkowski space

北海道大学大学院理学院数学専攻 修士 2 年

浅山 未来理 (Mikuri Asayama)

玉冲 愛子 (Aiko Tamaoki)

Department of Mathmatics,  
Hokkaido University

### 1 Introduction

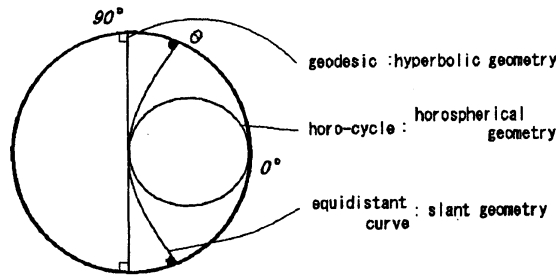
[2] では Hyperbolic 空間における幾何学として、**hyperbolic geometry** と **horospherical geometry** が考えられていた。ここではそれぞれ **vertical geometry**, **horizontal geometry** と呼ぶ。また [5] では de Sitter 空間内において平坦な空間的超曲面として flat elliptic hyperquadric を持つ幾何学、de Sitter hyperhorosphere を持つ幾何学、が存在することが知られている。それぞれの幾何学をここでは vertical geometry と horizontal geometry と呼ぶ。ここでは、それぞれの空間内において vertical geometry と horizontal geometry をつなげる幾何学を考える。それは 1 径数  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  に依存する幾何で、**slant geometry** と呼ぶ。

第 3 章では Hyperbolic 空間内における slant geometry を考える。この考えを 2 次元 hyperbolic 空間のモデルである Poincaré disk を用いて簡単に説明する。下図のように、Poincaré disk の理想境界である単位円との角度が  $90^\circ$  である円（測地線）を”直線”とみなすような幾何学が hyperbolic geometry であり、角度が  $0^\circ$  である単位円に接する円（ホロ円）を”直線”とみなすような幾何学が horospherical geometry である。第 3 章では単位円との角度がその間の  $\theta$  である円（等距離曲線）を”直線”とみなすような幾何学を考える。

第 4 章では de Sitter 空間内における slant geometry を考える。 $\theta = 0$  の時が horizontal geometry、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  の時が vertical geometry に対応している。

Poincaré disk

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{1 - (x^2 + y^2)} : \text{metric}$$



## 2 Minkowski space

ここではまず Minkowski 空間および hyperbolic 空間における用語の定義を行い、基本的な性質について述べる。

いま、 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, \dots, n)\}$  を  $(n+1)$  次元ベクトル空間とする。任意のベクトル  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  に対し、擬内積  $\langle, \rangle$  を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

と定める。 $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle)$  を  $(n+1)$  次元 Minkowski 空間といい、 $\mathbb{R}_1^{n+1}$  と表す。また、Minkowski 空間内のベクトル  $\mathbf{x}$  の擬ノルムを  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$  と定める。ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{0\}$  が spacelike, timelike, lightlike であるとはそれぞれ、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ ,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ ,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  であるときをいう。また、ベクトルの第 0 成分が正値 (負値) であるときにそれぞれ未来 (過去) 方向であるという。Minkowski 空間内の hyperplane を、ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{0\}$  と実数  $c$  を使って、

$$HP(\mathbf{v}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = c\}$$

と定める。Hyperplane  $HP(\mathbf{v}, c)$  が spacelike, timelike, lightlike であるとは、対応する  $\mathbf{v}$  が timelike, spacelike, lightlike であるときをいう。未来方向 (過去方向) の  $n$  次元 hyperbolic 空間を

$$H_{+(-)}^n(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_0 > 0 (x_0 < 0)\}$$

と定め、 $H^n(-1) = H_+^n(-1) \cup H_-^n(-1)$  とする。また、 $n$  次元 de Sitter 空間を

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = 1\}$$

と定める。さらに未来方向 (過去方向) の  $n$  次元 lightcone もそれぞれ、

$$LC_{+(-)}^* = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = 0, x_0 > 0 (x_0 < 0)\}$$

と定め、 $LC^* = LC_+^* \cup LC_-^*$  とする。

Minkowski 空間内の hyperplane と未来方向の  $n$  次元 hyperbolic 空間の共通部分

$$HP(v, c) \cap H_+^n(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, v \rangle = c, \langle x, x \rangle = -1\} \quad (v \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R})$$

を  $HQ_h(v, c)$  と表し、hyperquadric という。さらに  $v$  が timelike, spacelike, lightlike のときをそれぞれ、elliptic hyperquadric (hypersphere), hyperbolic hyperquadric (equidistant hypersurface), parabolic hyperquadric (hyperhorosphere) といひ、 $HE_h(v, c)$ ,  $HH_h(v, c)$ ,  $HS_h(v, c)$  と表す。特に  $c = 0$  なる hyperbolic hyperquadric を、flat hyperbolic hyperquadric (hyperplane) という。

また Minkowski 空間内の hyperplane と  $n$  次元 de Sitter 空間の共通部分

$$HP(v, c) \cap S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, v \rangle = c, \langle x, x \rangle = 1\} \quad (v \in \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R})$$

を  $HQ_d(v, c)$  と表し、hyperquadric という。さらに  $v$  が timelike, spacelike, lightlike のときをそれぞれ、elliptic hyperquadric, hyperbolic hyperquadric, parabolic hyperquadric (de Sitter hyperhorosphere) といひ、 $HE_d(v, c)$ ,  $HH_d(v, c)$ ,  $HS_d(v, c)$  と表す。特に  $c = 0$  なる elliptic hyperquadric を、flat (small) elliptic hyperquadric という。つぎに  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について、同様に集合を定義する。 $n$  次元  $\theta$ -hyperbolic 空間を

$$H^n(-\sin^2 \theta) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = -\sin^2 \theta\}$$

と定め、 $n$  次元  $\theta$ -de Sitter 空間を

$$S_1^n(\sin^2 \theta) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle x, x \rangle = \sin^2 \theta\}$$

と定める。すると、 $\theta = 0$  のとき  $H^n(-\sin^2 \theta) = S_1^n(\sin^2 \theta) = LC^* \cup \{0\}$  であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき  $H^n(-\sin^2 \theta) = H^n(-1)$ ,  $S_1^n(\sin^2 \theta) = S_1^n$  となる。

### 3 Slant geometry on Hyperbolic space

ここでは、hyperbolic 空間における slant geometry を考える。

### 3.1 Differential geometry of hypersurfaces in hyperbolic space

$H_+^n(-1)$  内の hypersurface を考える。 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  を開集合とし、その座標を  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$  と表す。写像  $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H_+^n(-1)$  を embedding とし、その像  $\mathbf{x}^h(U)$  を  $M_h$  と書く。その単位法ベクトルを  $\mathbf{x}^d$  とすると、常に  $\mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \in S_1^n$  を満たしている。このことから、 $\cos \theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \in S_1^n(\sin^2 \theta)$  がわかるので、

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_\theta^{d\pm} : U &\longrightarrow S_1^n(\sin^2 \theta) \\ \mathbf{u} &\mapsto \cos \theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

なる写像を定義し、 $\mathbf{x}^h$  の  $\theta$ -de Sitter Gauss indicatrix という。すると、 $\theta = 0$  のとき、 $\mathbb{N}_\theta^{d\pm} = \mathbf{x}^h \pm \mathbf{x}^d$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\mathbb{N}_\theta^{d\pm} = \pm \mathbf{x}^d$  となり、それぞれ [2] で導入されていた horizontal geometry の hyperbolic Gauss indicatrix, vertical geometry の de Sitter Gauss indicatrix になっている。

ここで、 $\mathbf{v} \in S_1^n(\sin^2 \theta)$  について、

$$HP(\mathbf{v}, -\cos \theta) \cap H_+^n(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = -\cos \theta, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$

を  $HQ_h(\mathbf{v}, -\cos \theta)$  と表し、 $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric という。すると  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric は、 $\theta = 0$  のとき parabolic hyperquadric (hyperhorosphere)  $HS_h(\mathbf{v}, -1)$  であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき flat hyperbolic hyperquadric (hyperplane)  $HH_h(\mathbf{v}, 0)$  となる。 $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric について次が成り立つ。

**Proposition 3.1.**  $\mathbb{N}_\theta^{d\pm}$  が定値写像のとき、hypersurface  $M_h$  は  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric に含まれる。

Euclidian differential geometry で、曲面の Gauss 写像が定値写像ならばその曲面は hyperplane の一部になっていた。したがってこの命題から、 $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric は slant geometry において Euclidian differential geometry の hyperplane にあたる重要な集合であることがわかる。

さて、微分写像  $d\mathbf{x}^d(\mathbf{u}), d\mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u})$  は  $T_{\mathbf{u}}U$  から  $T_p M_h$  への線型写像であるが、 $U$  と  $M_h$  は embedding  $\mathbf{x}^h$  によって同一視できるので、線型変換  $d\mathbf{x}^d(\mathbf{u}), d\mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}) : T_p M_h \rightarrow T_p M_h$  とみなされる。このとき、 $d\mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}) = \cos \theta \text{id}_{T_p M_h} \pm d\mathbf{x}^d(\mathbf{u})$  となっている。

線型変換  $S_\theta^{d\pm}(p) := -d\mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u})$  を  $M_h$  の  $p$  における  $\theta$ -de Sitter shape operator といい、線型変換  $A_p := -d\mathbf{x}^d(\mathbf{u})$  を  $M_h$  の  $p$  における de Sitter shape operator という。それぞれの固有値を  $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p), \kappa_p$  とおく。すると、 $S_\theta^{d\pm}(p) = -\cos \theta \text{id}_{T_p M_h} \pm A_p$  であること

から、ベクトル  $\mathbf{v}$  が  $S_\theta^{d\pm}(p)$  の固有ベクトルであることと  $A_p$  の固有ベクトルであることは同値になり、 $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p) = -\cos\theta \pm \kappa_p$  が成り立つ。また、関数  $K_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}) := \det S_\theta^{d\pm}(p)$  を  $M_h$  の  $p$  における  $\theta$ -de Sitter Gauss-Kronecker curvature といい、関数  $K_d(\mathbf{u}) := \det A_p$  を  $M_h$  の  $p$  における de Sitter Gauss-Kronecker curvature という。

$U$  の点  $\mathbf{u}$  (または  $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ ) が  $M_h$  の  $\theta$ -umbilic point であるとは、 $S_\theta^{d\pm}(p) = \bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p)id_{T_p M_h}$  となるときをいう。すると、この定義は  $A_p = \kappa_p id_{T_p M_h}$  が成り立つことと同値になり、 $\theta$  によらないことがわかる。したがって単に umbilic point と呼ぶ。また、hypersurface  $M_h$  が totally umbilic であるとは、 $M_h$  上のすべての点  $p$  が umbilic point となるときをいう。

Totally umbilic な曲面の分類として、以下の命題が成り立つ。

**Proposition 3.2.** *Hypersurface  $M_h$  が totally umbilic であるとき、 $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p), \kappa_p$  の値は一定となる。これを  $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}, \kappa$  と表すと、以下の分類を得る。*

(1)  $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} \neq 0$  の場合

- (a)  $0 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta| < 1$  ならば、 $M_h$  は hyperbolic hyperquadric に含まれる。
- (b)  $1 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta|$  ならば、 $M_h$  は elliptic hyperquadric に含まれる。
- (c)  $|\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta| = 1$  ならば、 $M_h$  は parabolic hyperquadric に含まれる。
- (d)  $\kappa = \bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta = 0$  ならば、 $M_h$  は flat hyperbolic hyperquadric に含まれる。

(2)  $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} = 0$  の場合、 $M_h$  は  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric に含まれる。

Umbilic point  $p$  について、 $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p) = 0$  となるものを  $\theta^\pm$ -flat point と定義する。

任意の  $i$  について、 $\mathbf{x}_{u_i}^h$  は spacelike であるので、 $g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$  は正定値かつ対称になる。このことから  $M_h$  上の Riemann 計量 ( $\mathbf{x}^h$  の hyperbolic 第一基本形式) は、

$$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle, \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$$

で与えられる。さらに、 $\mathbf{x}^h$  の  $\theta$ -第二基本形式を

$$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) := \langle -N_{\theta u_i}^{d\pm}(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義し、 $\mathbf{x}^h$  の de Sitter 第二基本形式を

$$h_{ij}(\mathbf{u}) := \langle -\mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義する。すると、 $\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = -\cos\theta g_{ij}(\mathbf{u}) \pm h_{ij}(\mathbf{u})$  が成り立っている。

**Proposition 3.3** ( $\theta$ -Weingarten 公式).  $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}, ((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j) = (\bar{h}^{\theta\pm}_{ik})(g^{kj})$  とおくとき、次の公式が成り立つ。

$$N_{\theta u_i}^{d\pm} = - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{h}^{\theta\pm})^i_j x_{u_j}^h$$

このとき、 $\theta$ -第二基本形式の定義から  $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u})) = -\cos\theta I \pm (h_{ik}(\mathbf{u}))(g^{kj}(\mathbf{u}))$  となっている。また、 $\theta$ -Weingarten 公式より  $\theta$ -de Sitter shape operator  $S_\theta^{d\pm}(p)$  の表現行列は、 $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u}))$  である。このことから、以下の公式を得る。

**Corollary 3.4.**

$$K_\theta^{d\pm} = \frac{\det(\bar{h}_{ij}^{\theta\pm})}{\det(g_{kl})}$$

$M_h$  の点  $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$  について、 $K_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}) = 0$  となるものを  $\theta^\pm$ -parabolic point という。

### 3.2 $\theta$ -height function

Hypersurface  $\mathbf{x}^h : U \rightarrow H_+^n(-1)$  と  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について、 $\mathbf{x}^h$  の  $\theta$ -height function を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H_\theta^d : U \times S_1^n(\sin^2 \theta) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto \langle \mathbf{x}^h(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle + \cos \theta \end{aligned}$$

すると、 $\theta = 0$  のとき horizontal geometry における lightcone height function であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときは vertical geometry の de Sitter height function になっている [2]。  $\theta$ -height function について次の命題が成り立つ。

**Proposition 3.5.** (1)  $H_\theta^d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  となる必要十分条件は、ある  $\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$  があって、

$$\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

(2)  $H_\theta^d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial H_\theta^d}{\partial u_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dots = \frac{\partial H_\theta^d}{\partial u_{n-1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  となる必要十分条件は、

$$\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) = N_\theta^{d\pm}(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

$\mathbf{v}_0 \in S_1^n(\sin^2 \theta)$  を固定した  $\theta$ -height function  $h_{\theta\mathbf{v}_0}^d$  を、

$$h_{\theta\mathbf{v}_0}^d : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{\theta\mathbf{v}_0}^d(\mathbf{u}) := H_{\theta}^d(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

と定める。また、 $h_{\theta\mathbf{v}_0}^d$  の  $\mathbf{u}$  におけるヘッセ行列を  $\text{Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0}^d)(\mathbf{u})$  と表す。すると、次の命題が成り立つ。

**Proposition 3.6.**  $\mathbf{v}_0^{\theta\pm} = \mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}(\mathbf{u}_0)$ ,  $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u}_0)$  をとるとき、次が成り立つ。

- (1)  $p$  が  $\theta^{\pm}$ -parabolic point となる必要十分条件は、 $\det \text{Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^d)(\mathbf{u}_0) = 0$  が成り立つことである。
- (2)  $p$  が  $\theta^{\pm}$ -flat point となる必要十分条件は、 $\text{rank Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^d)(\mathbf{u}_0) = 0$  が成り立つことである。

### 3.3 $\theta$ -de Sitter Gauss indicatrix as wave front

関数芽  $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  が Morse 超曲面族であるとは、 $\Delta^*F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^{k+1}, 0)$  を  $\Delta^*F := (F, \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_k})$  とおいたとき、 $\Delta^*F$  が非特異であるときをいう。このとき  $n-1$  次元部分多様体芽

$$\Sigma_*(F) := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \mid F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dots = \frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$$

を得る。また、写像芽  $\mathcal{L}_F : (\Sigma_*(F), (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \rightarrow PT^*\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{L}_F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{v}, [\frac{\partial F}{\partial v_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \dots : \frac{\partial F}{\partial v_n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})])$$

は Legendrian immersion germ である。 $\theta$ -height function  $H_{\theta}^d$  について、次が成り立つ。

**Proposition 3.7.**  $\theta$ -height function  $H_{\theta}^d$  は  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Sigma_*(H_{\theta}^d)$  のまわりで Morse 超曲面族である。

$\theta$ -height function  $H_{\theta}^d$  の特異点集合は

$$\Sigma_*(H_{\theta}^d) = (\Delta^*H_{\theta}^d)^{-1}(0) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times S_1^n(\sin^2 \theta) \mid H_{\theta}^d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H_{\theta\mathbf{u}_i}^d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$$

と表されるが、Proposition 3.5 より  $\Sigma_*(H_{\theta}^d) = \{(\mathbf{u}, \mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in U\}$  である。以上からルジャンドル特異点論により Legendrian immersion germ  $\mathcal{L}_{\theta}^{d\pm}$  を得る。ここで  $\mathbf{v}^{\theta\pm} = \mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}(\mathbf{u})$  であることから、 $\mathcal{L}_{\theta}^{d\pm}$  の wave front は  $\theta$ -de Sitter Gauss indicatrix の像となる。



### 3.4 Contact with $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric

この節では hypersurface  $M_h$  と  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric の間の接触について研究する。そのために部分多様体の間の接触に関する Montaldi の理論 [6] を復習する。まず以下の定義を行う。

$X_i, Y_i \subset (\mathbb{R}^n, y_i)$  を  $\dim X_1 = \dim X_2, \dim Y_1 = \dim Y_2$  を満たす部分多様体とする。このとき、 $X_1, Y_1$  の  $y_1$  における接触型と  $X_2, Y_2$  の  $y_2$  における接触型が同じであるとは、微分同相写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$  があって、集合芽として  $\Phi(X_1) = X_2, \Phi(Y_1) = Y_2$  が成り立つことである。この関係を  $K(X_1, Y_1 : y_1) = K(X_2, Y_2 : y_2)$  と表す。

Montaldi は多様体の間の接触型についての関係を写像の間の  $K$ -同値関係を用いて次のように表した。

**Theorem 3.8** (Montaldi).  $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) を部分多様体、 $\dim Y_i = n - 1$  とし、 $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  を  $f_i^{-1}(0) = Y_i$  を満たす *submersion*、 $g_i : (U_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$  を  $g_i(U_i) = X_i$  なる *immersion* とおく。このとき  $K(X_1, Y_1 : y_1) = K(X_2, Y_2 : y_2)$  であるための必要十分条件は  $f_1 \circ g_1$  と  $f_2 \circ g_2$  が  $K$ -同値となることである。

Montaldi[6] は、 $Y_i$  の余次元が一般の場合にも同様の定理を示した。

$x^h : U \rightarrow H_+^n(-1)$  を hypersurface とし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする。 $S_1^n(\sin^2 \theta) \ni \mathbf{v}_0$  について、関数  $h_{\theta \mathbf{v}_0}^d : H_+^n(-1) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $h_{\theta \mathbf{v}_0}^d(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle + \cos \theta$  と定義する。すると

$$h_{\theta \mathbf{v}_0}^{d-1}(0) = \{\mathbf{x} \in H_+^n(-1) \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle = -\cos \theta\} = HQ_h(\mathbf{v}_0, -\cos \theta)$$

より、 $h_{\theta \mathbf{v}_0}^{d-1}(0)$  は  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric となる。さらに、 $N_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{v}_0^{\theta\pm} \in S_1^n(\sin^2 \theta)$  のとき、 $h_{\theta \mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^{d-1}(0)$  は hypersurface  $M_h = x^h(U)$  に  $p = x^h(\mathbf{u}_0)$  で接している。このような  $h_{\theta \mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^{d-1}(0)$  を  $THQ_h^\pm(x^h, \mathbf{u}_0; \theta)$  と表して **tangent  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric** という。

$i = 1, 2$  について  $x_i^h : (U, \mathbf{u}_i) \rightarrow (H_+^n(-1), x_i^h(\mathbf{u}_i))$  を hypersurface とし、 $x_i^h$  の  $\theta$ -de Sitter Gauss indicatrix germ を  $N_\theta^{d\pm}$ 、 $\theta$ -height function を  $H_\theta^d$  とし、各  $\mathbf{u}_i$  について、 $\mathbf{v}_i^{\theta\pm} = N_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}_i)$  を固定した  $\theta$ -height function を  $h_{i, \mathbf{v}_i^{\theta\pm}}^\theta$  とする。また、Legendrian immersion germ を  $\mathcal{L}_\theta^{d\pm}$  とおく。このとき、ルジャンドル特異点論の応用として以下が成立する。

**Theorem 3.9.** 2つの hypersurface  $x_i^h$  に対応する Legendrian immersion germ  $\mathcal{L}_\theta^{d\pm}$  が Legendrian 安定ならば、次の条件は同値である。

1.  $\mathbb{N}_{\theta 1}^{d\pm}$  と  $\mathbb{N}_{\theta 2}^{d\pm}$  は  $\mathcal{A}$ -同値
2.  $\mathcal{L}_{\theta 1}^{d\pm}$  と  $\mathcal{L}_{\theta 2}^{d\pm}$  は Legendrian 同値
3.  $H_{\theta 1}^d$  と  $H_{\theta 2}^d$  は  $\mathcal{P}$ - $\mathcal{K}$ -同値
4.  $h_{1, \mathbf{v}_1^{\theta\pm}}^{\theta}$  と  $h_{2, \mathbf{v}_2^{\theta\pm}}^{\theta}$  は  $\mathcal{K}$ -同値
5.  $K(\mathbf{x}_1^h(U), THQ_h^{\pm}(\mathbf{x}_1^h, \mathbf{u}_1; \theta) : \mathbf{x}_1^h(\mathbf{u}_1)) = K(\mathbf{x}_2^h(U), THQ_h^{\pm}(\mathbf{x}_2^h, \mathbf{u}_2; \theta) : \mathbf{x}_2^h(\mathbf{u}_2))$

Hypersurface  $\mathbf{x}^h$  と  $\mathbf{u}_0 \in U$  について、 $(\mathbf{x}^{h-1}(THQ_h^{\pm}(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}_0; \theta)), \mathbf{u}_0)$  を  $\mathbf{x}^h$  の **positive(negative) tangent  $\theta$ -flat hyperbolic hyperquadric indicatrix germ** という。この集合芽は  $\mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}$  についての  $\mathcal{A}$ -不変量になることがわかる。

### 3.5 Hyperbolic Monge forms

[2] では、 $H_+^n(-1)$  内の hypersurface の局所表示として hyperbolic Monge form (H-Monge form) が導入された。ここでは  $n = 3$  ときを考える。

$U$  を  $\mathbb{R}^2$  における  $0$  の開近傍とし、 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(0) = 0$ ,  $f_{u_i}(0) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) を満たす関数とする。ここで H-Monge form  $\mathbf{x}_f^h : U \rightarrow H_+^3(-1)$  を

$$\mathbf{x}_f^h(\mathbf{u}) := (\sqrt{f^2(\mathbf{u}) + u_1^2 + u_2^2 + 1}, f(\mathbf{u}), u_1, u_2)$$

と定める。ここで、 $H_+^3(-1)$  内のどんな surface も、局所的には H-Monge form によって与えられることが知られている [2]。計算により  $\mathbf{x}_f^h(0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_f^d(0) = (0, -1, 0, 0)$  となり、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について、 $\mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}(0) = (\cos \theta, \mp 1, 0, 0)$  である。 $\mathbf{x}_f^h(0) = p$ ,  $\mathbb{N}_{\theta}^{d\pm}(0) = \mathbf{v}_0^{\theta\pm}$  とおく。 $\mathbf{v}_0^{\theta\pm}$  における  $\theta$ -flat hyperbolic quadric  $HQ_h^{\pm}(\mathbf{v}_0^{\theta\pm}, -\cos \theta)$  の H-Monge form  $\mathbf{x}_{HQ_h^{\pm}}^{\theta} : U \rightarrow H_+^3(-1)$  は、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{HQ_h^{\pm}}^{\theta}(\mathbf{u}) = & (1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 + \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}), \\ & \pm \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 + \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}), u_1, u_2) \end{aligned}$$

となる。このとき、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  ならば flat hyperbolic quadric (plane) の H-Monge form に一致し、 $\theta$  を  $0$  に近づけると parabolic quadric (horosphere) の H-Monge form に収束する。さらに  $\mathbf{x}_{HQ_h^{\pm}}^{\theta}(U)$  は  $p$  で  $\mathbf{x}_f^h(U)$  に接していることがわかるので、 $\mathbf{x}_{HQ_h^{\pm}}^{\theta}(U)$  は  $\mathbf{x}_f^h$  の  $p = \mathbf{x}_f^h(0)$  における tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric  $THQ_h^{\pm}(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)$  である。 $\mathbf{x}_f^h$  の tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric indicatrix は、

$$\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^{\pm}(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid \pm f(\mathbf{u}) = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 + \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)})\}$$

と表される。

## 4 slant geometry on de Sitter space

ここでは、de Sitter 空間における slant geometry を考える。

### 4.1 Differential geometry of spacelike hypersurface in de Sitter space

$S_1^n$  内の spacelike hypersurface を考える。 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  を開集合とし、その座標を  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$  と表す。写像  $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^n$  を embedding とし、その像  $\mathbf{x}^d(U)$  を  $M_d$  と書く。いま  $\mathbf{x}^d$  が spacelike hypersurface であるとは、 $\mathbf{x}_{u_i}^d$  によって張られる空間が spacelike であるときをいう。その単位法ベクトルを  $\mathbf{x}^h$  とすると、常に  $\mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \in H^n(-1)$  を満たしている。このことから、 $\cos \theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \in H^n(-\sin^2 \theta)$  がわかるので、

$$\mathbb{N}_\theta^{h\pm} : U \rightarrow H^n(-\sin^2 \theta)$$

$$\mathbf{u} \mapsto \cos \theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$$

なる写像を定義し、 $\theta$ -hyperbolic Gauss image of  $\mathbf{x}^d$  という。すると、 $\theta = 0$  のとき、 $\mathbb{N}_\theta^{h\pm} = \mathbf{x}^d \pm \mathbf{x}^h$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\mathbb{N}_\theta^{h\pm} = \pm \mathbf{x}^h$  となり、これらは [5] で定義された、lightcone Gauss image ( $\theta=0$ )、hyperbolic Gauss image ( $\theta=\frac{\pi}{2}$ ) に一致する。

ここで spacelike hyperplane と  $n$  次元 de Sitter 空間の共通部分

$$HP(\mathbf{v}, \cos \theta) \cap S_1^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \cos \theta, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\} \quad (\mathbf{v} \in H^n(-\sin^2 \theta))$$

を  $HQ_d(\mathbf{v}, \cos \theta)$  と表し、 $\theta$ -flat elliptic hyperquadric という。すると、 $\theta = 0$  のとき、parabolic hyperquadric  $HQ_d(\mathbf{v}, \cos \theta) = HS_d(\mathbf{v}, 1)$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、flat elliptic hyperquadric  $HQ_d(\mathbf{v}, \cos \theta) = HE_d(\mathbf{v}, 0)$  となる。 $\theta$ -flat elliptic hyperquadric について次が成り立つ。

**Proposition 4.1.**  $\mathbb{N}_\theta^{h\pm}$  が定値写像のとき、spacelike hypersurface  $M_d$  は  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric に含まれる。

$U$  と  $M_d$  は embedding  $\mathbf{x}^d$  によって同一視できるので、 $d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ ,  $d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u})$  を線型変換  $d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ ,  $d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) : T_p M_d \rightarrow T_p M_d$  とみなせる。このとき、 $d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) = \cos \theta \text{id}_{T_p M_d} \pm d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$  となっている。

線型変換  $S_\theta^{h\pm}(p) := -d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u})$  を  $M_d$  の  $p$  における  $\theta$ -hyperbolic shape operator といい、線型変換  $A_p := -d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$  を  $M_d$  の  $p$  における hyperbolic shape operator という。それぞれの固有値を  $\kappa_\theta^{h\pm}(p)$ ,  $\kappa_p$  とおく。すると、 $S_\theta^{h\pm}(p) = -\cos \theta \text{id}_{T_p M_d} \pm A_p$  であること

から、ベクトル  $\mathbf{v}$  が  $S_\theta^{h\pm}(p)$  の固有ベクトルであることと  $A_p$  の固有ベクトルであることは同値になり、 $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) = -\cos\theta \pm \kappa_p$  が成り立つ。また、関数  $K_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) := \det S_\theta^{h\pm}(p)$  を  $M_d$  の  $p$  における  $\theta$ -hyperbolic Gauss Kronecker curvature といい、関数  $K(\mathbf{u}) := \det A_p$  を  $M_d$  の  $p$  における hyperbolic Gauss Kronecker curvature という。

$U$  の点  $\mathbf{u}$  (または  $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u})$ ) が  $M_d$  の  $\theta$ -umbilic point であるとは、 $S_\theta^{h\pm}(p) = \bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) \text{id}_{T_p M_d}$  が成り立つときをいう。すると、この定義は  $A_p = \kappa_p \text{id}_{T_p M_d}$  が成立することと同値になり、 $\theta$  に依らないことがわかる。したがって単に umbilic point と呼ぶ。また、spacelike hypersurface  $M_d$  が totally umbilic であるとは、 $M_d$  上のすべての点  $p$  が umbilic point であることをいう。

**Proposition 4.2.** *Spacelike hypersurface  $M_d$  が totally umbilic であるとき、 $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p), \kappa_p$  の値は  $p$  に依存せず一定となる。これを  $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}, \kappa$  と表すと、以下の分類を得る。*

(1)  $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} \neq 0$  の場合

- (a)  $0 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta| < 1$  ならば、 $M_d$  は *elliptic hyperquadric* に含まれる。
- (b)  $1 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta|$  ならば、 $M_d$  は *hyperbolic hyperquadric* に含まれる。
- (c)  $|\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta| = 1$  ならば、 $M_d$  は *parabolic hyperquadric* に含まれる。
- (d)  $\kappa = \bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta = 0$  ならば、 $M_d$  は *flat elliptic hyperquadric* に含まれる。

(2)  $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} = 0$  の場合、 $M_d$  は  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric に含まれる。

このとき、umbilic point  $p$  について、 $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) = 0$  となるものを  $\theta^\pm$ -flat point と定義する。Proposition 4.2. から  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric は totally umbilic で  $\theta$ -flat な曲面であることがわかる。

任意の  $i = 1, \dots, n-1$  について、 $\mathbf{x}_{u_i}^d$  は spacelike であるので、 $g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u}) \rangle$  は正定値な対称行列になる。このことから  $M_d$  上の Riemann 計量 ( $\mathbf{x}^d$  の de Sitter 第一基本形式) が、

$$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u}) \rangle, \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$$

で与えられる。さらに、 $\mathbf{x}^d$  の  $\theta$ -第二基本形式を

$$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = \langle -N_{\theta u_i}^{h\pm}(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義し、 $\mathbf{x}^d$  の hyperbolic 第二基本形式を

$$h_{ij}(\mathbf{u}) = \langle -\mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義する。すると、 $\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = -\cos\theta g_{ij}(\mathbf{u}) \pm h_{ij}(\mathbf{u})$  が成り立つ。

**Proposition 4.3** ( $\theta$ -Weingarten 公式).  $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}, ((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j) = (\bar{h}^{\theta\pm}_{ik})(g^{kj})$  とおくと、次の公式が成り立つ。

$$\mathbb{N}^{h\pm}_{\theta u_i} = - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{h}^{\theta\pm})^i_j \mathbf{x}^d_{u_j}$$

このとき、 $\theta$ -第二基本形式の定義から  $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u})) = -\cos\theta \mathbf{I}_{n-1} \pm (h_{ik}(\mathbf{u}))(g^{kj}(\mathbf{u}))$  となる。また、 $\theta$ -Weingarten 公式より  $\theta$ -hyperbolic shape operator  $S^{h\pm}_\theta(p)$  の表現行列は、 $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u}))$  である。このことから、 $\theta$ -hyperbolic Gauss Kronecker curvature  $K^{h\pm}_\theta$  について以下の公式を得る。

**Corollary 4.4.**

$$K^{h\pm}_\theta = \frac{\det(\bar{h}^{\theta\pm}_{ij})}{\det(g_{kl})}$$

$M_d$  の点  $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u})$  について、 $K^{h\pm}_\theta(\mathbf{u}) = 0$  となるものを  $\theta^\pm$ -parabolic point という。また  $\theta$ -hyperbolic Gauss image  $\mathbb{N}^{h\pm}_\theta$  の特異点は、 $\theta^\pm$ -parabolic point となる。

## 4.2 $\theta$ -height function

Spacelike hypersurface  $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S^n_1$  と  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について、 $\mathbf{x}^d$  の  $\theta$ -height function を関数族として次のように定義する。

$$H^h_\theta : U \times H^n(-\sin^2\theta) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle - \cos\theta$$

すると  $\theta = 0$  のとき、 $H^h_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle - 1$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき  $H^h_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$  となり、[5] で定義された lightcone height function( $\theta = 0$ )、hyperbolic height function( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) に一致する。

**Proposition 4.5.**  $\theta$ -height function  $H^h_\theta$  について次が成り立つ。

1.  $H^h_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  となる必要十分条件は、ある  $\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$  があって、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{x}^d_{u_i}(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

2.  $H^h_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial H^h_\theta}{\partial u_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dots = \frac{\partial H^h_\theta}{\partial u_{n-1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  となる必要十分条件は、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) = \mathbb{N}^{h\pm}_\theta(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

$\mathbf{v}_0 \in H^n(-\sin^2 \theta)$  を固定した  $\theta$ -height function  $h_{\theta\mathbf{v}_0}^h$  を、

$$h_{\theta\mathbf{v}_0}^h : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{\theta\mathbf{v}_0}^h(\mathbf{u}) = H_\theta^h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

と定める。また、 $h_{\theta\mathbf{v}_0}^h(\mathbf{u})$  の Hesse 行列を  $\text{Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0}^h)(\mathbf{u})$  と表す。

**Proposition 4.6.**  $\mathbf{v}_0^{\theta\pm} = \mathbf{N}_\theta^{\pm}(\mathbf{u}_0)$ ,  $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u}_0)$  とするとき、以下が成り立つ。

1.  $p$  が  $\theta^\pm$ -parabolic point となる必要十分条件は、 $\det \text{Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^h)(\mathbf{u}_0) = 0$  が成り立つことである。
2.  $p$  が  $\theta^\pm$ -flat point となる必要十分条件は、 $\text{rank Hess}(h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^h)(\mathbf{u}_0) = 0$  が成り立つことである。

### 4.3 $\theta$ -hyperbolic Gauss image as wave front

Spacelike hypersurface  $\mathbf{x}^d$  の  $\theta$ -height function  $H^\theta$  に対し、 $H_\theta^h$  の特異点集合を  $\sum_*(H_\theta^h)$  とおくと、特異点集合は  $\sum_*(H_\theta^h) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) | H_\theta^h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial H_\theta^h}{\partial u_i}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$  と表される。Proposition 4.5. より  $\sum_*(H_\theta^h) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{N}_\theta^{\pm}(\mathbf{u})) | \mathbf{u} \in U\}$  となる。 $\theta$ -height function  $H_\theta^h$  について次が成り立つ。

**Proposition 4.7.**  $H^\theta$  は  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \sum_*(H^\theta)$  のまわりで Morse 超曲面族である。

Legendrian 特異点論から、 $\sum_*(H_\theta^h)$  は部分多様体となり、Legendrian immersion germ  $\mathcal{L}_\theta^{\pm}$  が構成される。また  $\mathcal{L}_\theta^{\pm}$  の wave front は  $\theta$ -hyperbolic Gauss image の像と一致する。

### 4.4 contact with $\theta$ -flat elliptic hyperquadric

この節では spacelike hypersurface  $M_d$  と  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric の間の接触に関して見ていく。 $\mathbf{x}^d : U \rightarrow S_1^n$  を spacelike hypersurface とし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする。 $H^n(-\sin^2 \theta) \ni \mathbf{v}_0$  について、関数  $h_{\theta\mathbf{v}_0}^h : S_1^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $h_{\theta\mathbf{v}_0}^h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle - \cos \theta$  と定義する。すると、

$$h_{\theta\mathbf{v}_0}^{h^{-1}}(0) = \{\mathbf{x} \in S_1^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle = \cos \theta\} = S_1^n(-1) \cap HP(\mathbf{v}_0, \cos \theta) = HQ_d(\mathbf{v}_0, \cos \theta)$$

は  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric となる。さらに、 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{N}_\theta^{\pm}(\mathbf{u}_0) =: \mathbf{v}_0^{\theta\pm} \in H^n(-\sin^2 \theta)$  の時  $h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^{h^{-1}}(0)$  は spacelike hypersurface  $M_d = \mathbf{x}^d(U)$  に  $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u}_0)$  で接している。ここで、Theorem 3.8. における  $f_i$  と  $g_i$  は  $h_{\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^\theta$  と  $\mathbf{x}^d$  に対応する。 $h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}^{h^{-1}}(0) = HQ_d(\mathbf{v}_0^{\theta\pm}, \cos \theta)$

を  $M_d$  の  $p$  における **tangent  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric** といい、 $THQ_d^\pm(\mathbf{x}^d, u_0; \theta)$  と表す。  $i = 1, 2$  について  $\mathbf{x}_i^d : (U, u_i) \rightarrow (S_1^n, \mathbf{x}_i^d(u_i))$  を spacelike hypersurface とし、対応する  $\theta$ -hyperbolic Gauss image を  $N_{\theta i}^{h\pm}$ , Legendrian immersion を  $\mathcal{L}_{\pm\theta i}^h$ ,  $\theta$ -height function を  $H_{\theta i}^h$ , 各  $\mathbf{u}_i$  について、 $\mathbf{v}_i^{\theta\pm} = N_{\theta i}^{h\pm}(\mathbf{u}_i)$  を固定した  $\theta$ -height function を  $h_{\theta i, \mathbf{v}_i^{\theta\pm}}^h(u)$  とする。このとき Legendrian 特異点論の応用として以下が成立する。

**Theorem 4.8.** 2つの spacelike hypersurface  $\mathbf{x}_i^d$  に対応する Legendrian immersion germ  $\mathcal{L}_{\theta i}^\pm$  が Legendrian 安定ならば、次の命題は同値である。

1.  $N_{\theta 1}^{h\pm}$  と  $N_{\theta 2}^{h\pm}$  は  $\mathcal{A}$ -同値
2.  $\mathcal{L}_{\theta 1}^{h\pm}$  と  $\mathcal{L}_{\theta 2}^{h\pm}$  は Legendrian 同値
3.  $H_{\theta 1}^h$  と  $H_{\theta 2}^h$  は  $\mathcal{P}$ - $\mathcal{K}$  同値
4.  $h_{\theta 1, \mathbf{v}_1^{\theta\pm}}^h$  と  $h_{\theta 2, \mathbf{v}_2^{\theta\pm}}^h$  は  $\mathcal{K}$ -同値
5.  $K(\mathbf{x}_1^d(U), THQ_d^\pm(\mathbf{x}_1^d, u_1; \theta) : \mathbf{x}_1^d(u_1)) = K(\mathbf{x}_2^d(U), THQ_d^\pm(\mathbf{x}_2^d, u_2; \theta) : \mathbf{x}_2^d(u_2))$

Spacelike hypersurface  $\mathbf{x}^d$  と  $\mathbf{u}_0 \in U$  について、 $(\mathbf{x}^{d-1}(THQ_d^\pm(\mathbf{x}^d, \mathbf{u}_0; \theta)), \mathbf{u}_0)$  を  $\mathbf{x}^h$  の **positive(negative) tangent  $\theta$ -flat elliptic hyperquadric indicatrix germ** と言う。この集合芽は  $N_\theta^{h\pm}$  についての  $\mathcal{A}$ -不変量になることがわかる。

#### 4.5 Spacelike de Sitter Monge forms

[5] では、 $S_1^n$  内の spacelike hypersurface の局所表示として spacelike de Sitter Monge form を導入した。ここでは、 $n = 3$  のときを考える。 $U$  を  $\mathbb{R}^2$  における  $0$  の開近傍とし、 $C^\infty$  関数  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(0) = 0$ ,  $f_{u_i}(0) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) を満たす関数とする。ここで、spacelike de Sitter Monge form  $\mathbf{x}_f^d : U \rightarrow S_1^3$  を

$$\mathbf{x}_f^d(\mathbf{u}) := (-f(u), -\sqrt{1 + f^2(U) - u_1^2 - u_2^2}, u_1, u_2)$$

と定める。ここで  $S_1^n$  内のどんな spacelike surface も、局所的には spacelike de Sitter Monge form によって与えられることが知られている [5]。計算により  $\mathbf{x}_f^d(0) = (0, -1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_f^h(0) = (1, 0, 0, 0)$  より、 $N_\theta^{h\pm}(0) = (\pm 1, -\cos \theta, 0, 0)$  である。 $\mathbf{x}_f^d(0) = p$ ,  $N_\theta^{h\pm}(0) = \mathbf{v}_0^{\theta\pm}$  とおく。 $\mathbf{v}_0^{\theta\pm}$  における  $\theta$ -flat elliptic quadric  $HQ_d(\mathbf{v}_0^{\theta\pm}, \cos \theta)$  の spacelike de Sitter Monge form  $\mathbf{x}_{HQ_d^\pm}^\theta : U \rightarrow S_1^3$  は、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  について

$$\mathbf{x}_{HQ_d^\pm}^\theta(\mathbf{u}) = (\mp \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}), -1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}), u_1, u_2)$$

となる。このとき、もし  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ならば flat elliptic quadric の spacelike de Sitter Monge form に一致し、 $\theta$  を 0 に近づけると parabolic quadric の spacelike de Sitter Monge form に収束する。 $\mathbf{x}_{HQ_d^\pm}^\theta(U)$  は  $\mathbf{x}_f^d(0) = p$  において  $\mathbf{x}_f^d(U)$  に接している。したがって、 $\mathbf{x}_{HQ_d^\pm}^\theta(U)$  は  $\mathbf{x}_f^d(U)$  の  $p = \mathbf{x}_f^d(0)$  における tangent  $\theta$ -flat elliptic quadric  $THQ_d^\pm(\mathbf{x}_f^d, 0; \theta)$  である。さらに  $\mathbf{x}_f^d$  の tangent  $\theta$ -flat elliptic quadric indicatrix は、

$$\mathbf{x}_f^{d-1}(THQ_d^\pm(\mathbf{x}_f^d, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid \pm f(\mathbf{u}) = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)})\}$$

と表される。

## 5 Examples

最後に、hyperbolic 空間について、 $n = 3$  の場合のいくつかの例とその図を紹介する。図を描くために Poincaré ball model を考える。 $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$  を hyperbolic 空間の Poincaré ball model とする。hyperbolic metric は

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

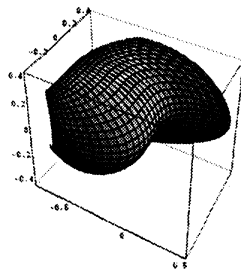
である。ここで、canonical isometric diffeomorphism  $\Phi : H_+^3(-1) \rightarrow D$  の存在が知られており、

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{x_0 + 1}, \frac{x_2}{x_0 + 1}, \frac{x_3}{x_0 + 1} \right)$$

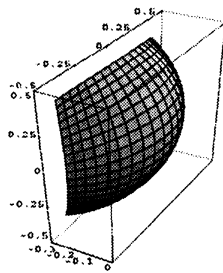
で与えられる。したがって、 $f(0) = f_{u_i}(0) = 0$  なる任意の関数  $f(u_1, u_2)$  について、 $D$  内にその H-Monge form によって与えられる曲面の絵を描くことができる。

**Example 5.1.**  $f(u_1, u_2) = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 + \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}) + \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2$  とすると、 $\kappa_1 = -\cos \theta$ ,  $\kappa_2 = -\cos \theta - 2$  より正負の  $\theta$ -de Sitter Gauss-Kronecker curvature はそれぞれ  $K_\theta^{d+}(0) = 0$ ,  $K_\theta^{d-}(0) = 4 \cos \theta (\cos \theta + 1)$  となる。したがって  $0$  は  $\theta^+$ -parabolic point であり、 $\mathbf{x}_f^h$  の正の tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric indicatrix は  $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^+(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2 = 0\}$  となり ordinary cusp である。下図は  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のときの曲面  $\Phi \circ \mathbf{x}_f^h(U)$  と正の  $\theta$ -flat hyperbolic quadric  $\Phi \circ \mathbf{x}_{HQ_h^+}^\theta(U)$  と、それらを合わせたものである。二つの曲面の接点に cusp が現れる。

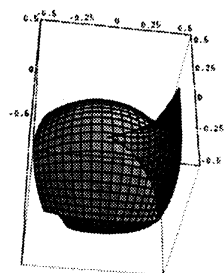




surface



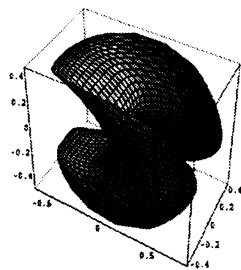
flat



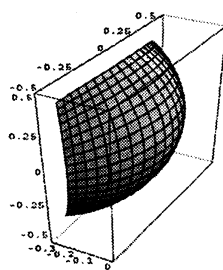
cusp

また負については、 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  のとき  $0$  は  $\theta^-$ -parabolic point でないが、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき  $0$  は  $\theta^-$ -parabolic point である。 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\mathbf{x}_f^h$  の負の tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric indicatrix は  $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^-(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2 = 0\}$  となり ordinary cusp になっている。

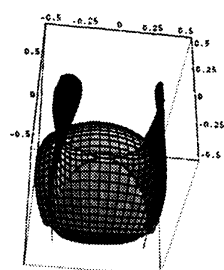
**Example 5.2.**  $f(u_1, u_2) = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{1 + \sin^2 \theta (u_1^2 + u_2^2)}) + u_1^4 - u_2^2$  とすると、 $\kappa_1 = -\cos \theta$ ,  $\kappa_2 = -\cos \theta - 2$  より正負の  $\theta$ -de Sitter Gauss-Kronecker curvature はそれぞれ  $K_\theta^{d+}(0) = 0$ ,  $K_\theta^{d-}(0) = 4 \cos \theta (\cos \theta + 1)$  となる。したがって  $0$  は  $\theta^+$ -parabolic point であり、 $\mathbf{x}_f^h$  の正の tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric indicatrix は  $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^+(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid u_1^4 - u_2^2 = 0\}$  となり tachnodal である。下図は  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のときの曲面  $\Phi \circ \mathbf{x}_f^h(U)$  と正の  $\theta$ -flat hyperbolic quadric  $\Phi \circ \mathbf{x}_{HQ_h^+}^\theta(U)$  と、それらを合わせたものである。二つの曲面の接点に tachnodal が現れる。



surface



flat



tachnodal

また負については、 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  のとき  $0$  は  $\theta^-$ -parabolic point でないが、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき  $0$  は  $\theta^-$ -parabolic point である。 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\mathbf{x}_f^h$  の負の tangent  $\theta$ -flat hyperbolic quadric indicatrix は  $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^-(\mathbf{x}_f^h, 0; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid u_1^4 - u_2^2 = 0\}$  となり tachnodal になっている。

## 参考文献

- [1] V.I.Arnol'd, S.M.Gusein-Zade and A.N.Varchenko, *Singularities of Differentiable maps, Volume I.* (Birkhäuser, Basel, 1986).
- [2] S.Izumiya, D.Pei, T.Sano, *Singularities of Hyperbolic Gauss Maps.* Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), 485–512.
- [3] 泉屋周一, 石川剛郎 著, 応用特異点論. (共立出版, 1998).
- [4] J.Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps.* London Math Soc. Lecture Note Series **58** (Cambridge University Press, 1982).
- [5] M.Kasedou, *Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space.* J.Geom. **94** (2009), 107-121
- [6] J.A.Montaldi, *On contact between submanifolds.* Michigan Math. J. **33** (1986), 195–199.
- [7] V.M.Zakaryukin, *Lagrangian and Legendrian singularities.* Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 23–31.